Societatea de Ştiinţe Matematice
din România

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a V-a

Enunţuri

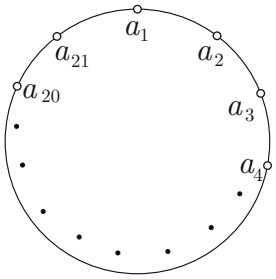
Problema 1. Două numere naturale x şi y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinaţi cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Problema 2. Determinaţi numerele naturale a, b, c care au proprietatea că $a + b + c = abc$.

Problema 3. O mulţime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea $(\mathcal{P})$ dacă oricare submulţime nevidă a sa are suma elementelor număr compus. Arătaţi că mulţimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, \ldots, 113! + 15\}$ are proprietatea $(\mathcal{P})$. (Dacă n este număr natural nenul, notaţia $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)

Problema 4. Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulţimii $\{1, 2, \ldots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \ldots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \\ S_2 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6, \\ &\ldots \\ S_{17} &= a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21}, \\ S_{18} &= a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1. \end{aligned}$$



Arătaţi că cel puţin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărţirea cu 5.

Timp de lucru 2 ore şi 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.